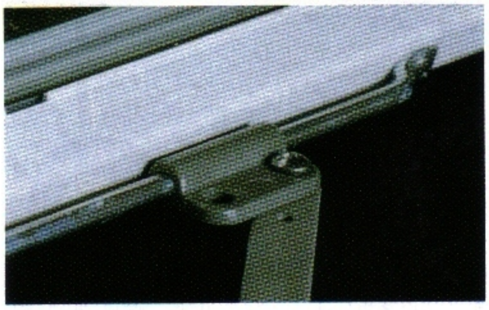
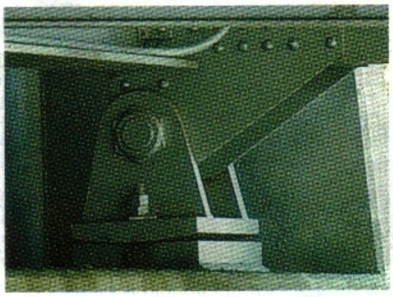
EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES

4.3. REACCIONES EN LOS PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES DE UNA ESTRUCTURA BIDIMENSIONAL



Fotografía 4.3 Cuando el eslabón del mecanismo de apertura del toldo para ventana se extiende, la fuerza que éste ejerce sobre el deslizador produce una fuerza normal aplicada sobre la barra, lo que causa que el toldo se abra.



Fotografía 4.4 El apoyo oscilatorio del estribo montado, que se muestra en la fotografía, se usa para apoyar el camino sobre un puente.

Fotografía 4.5 Se muestra la expansión del apoyo oscilatorio de un puente con plataforma de trabes. La superficie convexa del oscilador le permite al apoyo de la trabe moverse en forma horizontal.

En la primera parte de este capítulo se considera el equilibrio de una estructura bidimensional, esto es, se supone que la estructura que se está analizando y las fuerzas aplicadas sobre la misma están contenidas en el mismo plano. De la forma más clara, las reacciones necesarias para mantener a la estructura en la misma posición también estarán contenidas en el mismo plano.

Las reacciones ejercidas sobre una estructura bidimensional pueden ser divididas en tres grupos que corresponden a tres tipos de *apoyos* (puntos de apoyo) o *conexiones*:

1. *Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida*. Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *rodillos*, *balancines*, *superficies sin fricción*, *eslabones o bielas* y *cables cortos*, *collarines sobre barras sin fricción* y *pernos sin fricción en ranuras lisas*. Cada uno de estos apoyos y conexiones pueden impedir el movimiento sólo en una dirección. Los apoyos mencionados anteriormente junto con las reacciones que producen se muestran en la figura 4.1. Cada una de estas reacciones involucra a una *sola incógnita*, es decir, la magnitud de la reacción; dicha magnitud debe representarse con una letra apropiada. La línea de acción de la reacción es conocida y debe indicarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. El sentido de la reacción debe ser como se muestra en la figura 4.1 para los casos de una superficie sin fricción (hacia el cuerpo libre) o de un cable (alejándose del cuerpo libre). La reacción puede estar dirigida en uno u otro sentido en el caso de rodillos de doble carril, eslabones, collarines sobre barras y pernos en ranuras. Por lo general, los rodillos de un carril y los balancines son reversibles y, por tanto, las reacciones correspondientes también pueden estar dirigidas en uno u otro sentido.

2. *Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas*. Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *pernos sin fricción en orificios ajustados*, *articulaciones o bisagras y superficies rugosas*. Éstos pueden impedir la traslación del cuerpo rígido en todas direcciones pero no pueden impedir la rotación del mismo con respecto a la conexión. Las reacciones de este grupo involucran *dos incógnitas* que usualmente se representan por sus componentes x y y. En el caso de una superficie rugosa, la componente perpendicular a la superficie debe dirigirse alejándose de ésta.

3. *Reacciones equivalentes a una fuerza y un par*. Estas reacciones se originan por *apoyos fijos*, los cuales se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre y, por tanto, lo restringen por completo. Los soportes fijos producen fuerzas sobre toda la superficie de contacto; sin embargo, estas fuerzas forman un sistema que se puede reducir a una fuerza y un par. Las reacciones de este grupo involucran *tres incógnitas*, las cuales consisten en las dos componentes de la fuerza y en el momento del par.

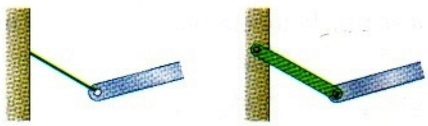
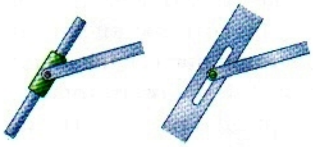
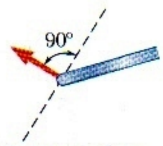
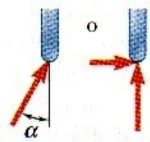
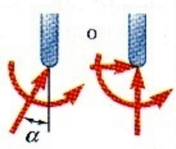
Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas
 Rodillos o patines · Balancín · Superficie sin fricción	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Cable corto · Eslabón corto	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Collarín sobre una barra sin fricción · Perno sin fricción en una ranura lisa	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Perno sin fricción, articulación o bisagra · Superficie rugosa	 Fuerza de dirección desconocida	2
 Apoyo fijo	 Fuerza y par	3

Figura 4.1 Reacciones en apoyos y conexiones.

Cuando el sentido de una fuerza o un par desconocido no es evidente, no se debe intentar determinarlo. En lugar de ello, se supondrá arbitrariamente el sentido de la fuerza o el par; el signo de la suposición obtenida indicará si la respuesta fue correcta o no.

4.4. EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN DOS DIMENSIONES

Las condiciones establecidas en la sección 4.1 para el equilibrio de un cuerpo rígido se vuelven más simples para casos de estructuras bidimensionales. Al seleccionar a los ejes x y y en el plano de la estructura, se tiene que

$$F_z = 0 \qquad M_x = M_y = 0 \qquad M_z = M_O$$

para cada una de las fuerzas aplicadas sobre la estructura. Por tanto, las seis ecuaciones de equilibrio derivadas en la sección 4.1 se reducen a

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0 \tag{4.4}$$

y a las tres identidades triviales $0 = 0$. Como se debe cumplir que $\Sigma M_O = 0$ sin importar la elección del origen O, se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio para una estructura bidimensional en la forma más general

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{4.5}$$

donde A es cualquier punto en el plano de la estructura. Las tres ecuaciones obtenidas pueden resolverse para un máximo de *tres incógnitas*.

En la sección anterior se vio que las fuerzas desconocidas incluyen reacciones y que el número de incógnitas correspondientes a una reacción depende del tipo de apoyo o conexión que origina dicha reacción. Como se hizo referencia en la sección 4.3, se observa que las ecuaciones de equilibrio (4.5) pueden ser empleadas para determinar las reacciones asociadas con dos rodillos y un cable, un apoyo fijo o un rodillo y un perno en un orificio ajustado, etcétera.

Observe la figura 4.2*a*, en la cual la armadura mostrada está sometida a las fuerzas dadas **P**, **Q** y **S**. La armadura se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un rodillo en B. El perno impide que el punto A se mueva ejerciendo una fuerza sobre la armadura que se puede descomponer en las componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$; por su parte, el rodillo impide que la armadura rote con respecto a A ejerciendo la fuerza vertical **B**. El diagrama de cuerpo libre de la armadura se muestra en la figura 4.2*b*; éste incluye tanto las reacciones $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y **B** como las fuerzas aplicadas **P**, **Q** y **S** y el peso **W** de la armadura. Para expresar que la suma de los momentos con respecto a A, que implica todas las fuerzas mostradas en la figura 4.2*b*, es igual a cero, se escribe la ecuación $\Sigma M_A = 0$, la cual puede utilizarse para determinar la magnitud B puesto que dicha ecuación no contiene a A_x o a A_y. Después, para indicar que la suma de las componentes x y y de las fuerzas son iguales a cero, se escriben las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, a partir de las cuales se obtienen, respectivamente, las componentes A_x y A_y.

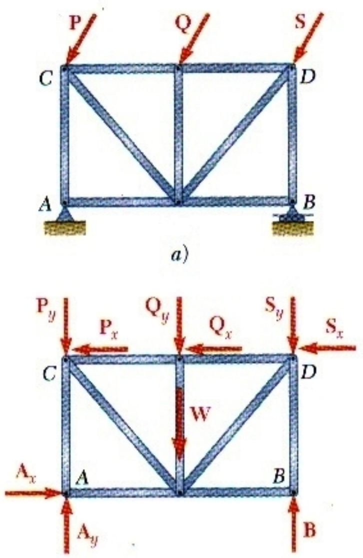


Figura 4.2

Se podría obtener una ecuación adicional expresando que la suma de momentos de las fuerzas externas con respecto a un punto distinto de A es igual a cero. Por ejemplo, se podría escribir $\Sigma M_B = 0$. Sin embargo, una expresión de ese tipo no contendría ninguna información nueva, puesto que ya se ha establecido que el sistema de fuerzas mostrado en la figura 4.2*b* es equivalente a cero. Por tanto, la ecuación adicional *no sería independiente* y no podría utilizarse para determinar una cuarta incógnita. Sin embargo, esta ecuación serviría para verificar la solución obtenida a partir de las tres ecuaciones de equilibrio originales.

A pesar de que no se pueden *poner* ecuaciones *adicionales* a las tres ecuaciones de equilibrio originales, cualquiera de éstas puede ser *reemplazada* por otra. De esta forma, un sistema alternativo de ecuaciones de equilibrio es

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \tag{4.6}$$

donde el segundo punto con respecto al cual se suman los momentos (en este caso, el punto B) no puede estar ubicado en la línea paralela al eje y que pasa a través del punto A (figura 4.2*b*). Estas ecuaciones son condiciones suficientes para el equilibrio de la armadura. Las primeras dos ecuaciones indican que las fuerzas externas deben reducirse a una sola fuerza vertical en A. Como la tercera ecuación requiere que el momento de esta fuerza sea igual a cero con respecto al punto B, el cual no está sobre su línea de acción, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

Un tercer posible conjunto de ecuaciones de equilibrio es

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \tag{4.7}$$

donde los puntos A, B y C no son colineales (figura 4.2*b*). La primera ecuación requiere que las fuerzas externas se reduzcan a una sola fuerza en A; la segunda ecuación requiere que esta fuerza pase a través de B y la tercera ecuación requiere que pase a través de C. Como los puntos A, B y C no son colineales, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

La ecuación $\Sigma M_A = 0$, la cual expresa que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al perno A es igual a cero, posee un significado físico más definido que cualquiera de las otras dos ecuaciones (4.7). Éstas expresan una idea similar de balance pero lo hacen con respecto a puntos en los cuales el cuerpo rígido no está realmente articulado. Sin embargo, dichas ecuaciones son tan útiles como la primera y la selección de las ecuaciones de equilibrio no debe estar indebidamente influida por el significado físico de las mismas. De hecho, en la práctica será deseable elegir ecuaciones de equilibrio que contengan una sola incógnita, puesto que así se elimina la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas. Es posible obtener ecuaciones de una sola incógnita al sumar momentos con respecto al punto de intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas o, si dichas fuerzas son paralelas, sumar las componentes perpendiculares a esa dirección común. Por ejemplo, en la figura 4.3, en la cual la armadura mostrada se sostiene por rodillos en A y B y por un eslabón corto en D, las reacciones en A y B pueden eliminarse con la suma de las componentes x. Las reacciones en A y D se eliminan al sumar momentos con respecto a C, y las reacciones en B y D sumando momentos con respecto a D. Las ecuaciones obtenidas son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \qquad \Sigma M_D = 0$$

Cada una de estas ecuaciones contiene una sola incógnita.

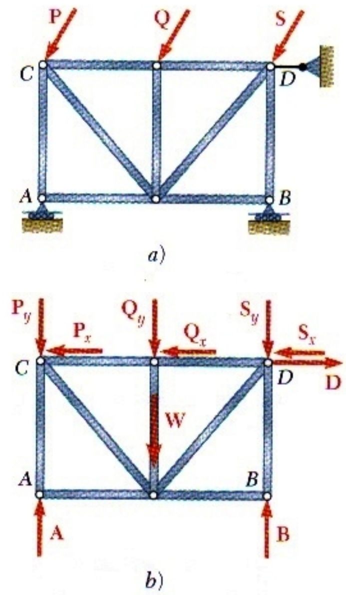
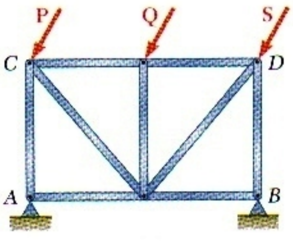


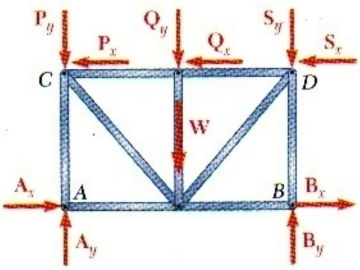
Figura 4.3

4.5. REACCIONES ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS. RESTRICCIONES PARCIALES

En los dos ejemplos considerados en la sección anterior (figuras 4.2 y 4.3), los tipos de apoyos usados fueron tales que era imposible que el cuerpo rígido se moviera bajo la acción de las cargas dadas o bajo cualquier otra condición de carga. En casos como éstos, se dice que el cuerpo rígido tiene *restricción completa*. También se debe recordar que las



a)



b)

Figura 4.4 Reacciones estáticamente indeterminadas.

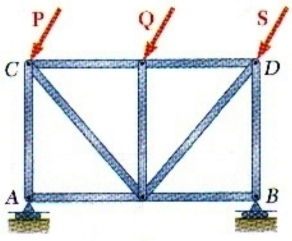
reacciones correspondientes a estos apoyos involucraban *tres incógnitas*, las cuales podían determinarse resolviendo las tres ecuaciones de equilibrio. Cuando se presenta una situación como ésta, se dice que son reacciones *estáticamente determinadas*.

En la figura 4.4*a* la armadura mostrada se sostiene por pernos en *A* y *B*. Estos apoyos proporcionan más restricciones de las necesarias para evitar que la armadura se mueva bajo la acción de las cargas dadas o bajo cualquier otra condición de carga. También se observa a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 4.4*b* que las reacciones correspondientes involucran *cuatro incógnitas*. Puesto que, como se señaló en la sección 4.4, sólo están disponibles tres ecuaciones de equilibrio independientes, se tienen *más incógnitas que ecuaciones*; por tanto, no se pueden determinar todas las incógnitas. Mientras que las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ proporcionan, respectivamente, las componentes verticales B_y y A_y, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ sólo proporciona la suma $A_x + B_x$ de las componentes horizontales de las reacciones en *A* y *B*. Se dice que las componentes A_x y B_x son *estáticamente indeterminadas*. Éstas pueden determinarse considerando las deformaciones ocasionadas en la armadura por la condición de carga dada, pero este método está fuera del alcance de la estática y corresponde al estudio de la mecánica de materiales.

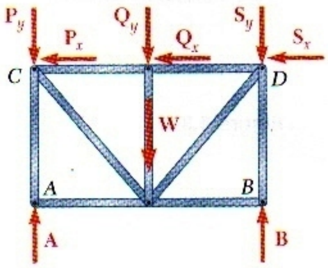
Los apoyos usados para sostener la armadura mostrada en la figura 4.5*a* consisten en los rodillos en *A* y *B*. Es evidente que las restricciones proporcionadas por estos apoyos no son suficientes para impedir que la armadura se mueva. Aunque se impide cualquier movimiento vertical, no hay nada que evite que la armadura pueda moverse en forma horizontal. Bajo estas circunstancias, se dice que la armadura tiene *restricción parcial*.† En la figura 4.5*b* se observa que las reacciones en *A* y *B* sólo involucran *dos incógnitas*. Como aún se tienen que cumplir tres ecuaciones de equilibrio, hay menos incógnitas que ecuaciones y, en general, una de las ecuaciones de equilibrio no se cumplirá. Mientras que las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ se pueden cumplir por medio de una selección apropiada de las reacciones en *A* y *B*, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no será satisfecha a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas sea igual a cero. Por tanto, no se puede mantener el equilibrio de la armadura de la figura 4.5 bajo condiciones generales de carga.

De lo anterior se concluye que si un cuerpo rígido tiene restricción completa y si las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, *entonces habrá tantas incógnitas como ecuaciones de equilibrio*. Cuando esta condición *no se cumple*, se tiene la certeza de que el cuerpo rígido no está completamente restringido o de que las reacciones en sus apoyos no son estáticamente determinadas; además, también es posible que el cuerpo rígido no esté completamente restringido y que las reacciones sean estáticamente indeterminadas.

Sin embargo, se debe señalar que la condición ya mencionada, aunque es *necesaria*, *no es suficiente*. En otras palabras, el hecho de que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones no garantiza que el cuerpo tenga restricción completa o que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas. Observe la figura 4.6*a* en la cual la armadura mostrada se sostiene por medio de rodillos en *A*,



a)



b)

Figura 4.5
Restricciones parciales.

† En ocasiones se hace referencia a los cuerpos con restricción parcial como *inestables*. Sin embargo, para evitar confusiones entre este tipo de inestabilidad, debida a un número insuficiente de restricciones y el tipo de inestabilidad considerada en el capítulo 10, la cual está relacionada con el comportamiento de un cuerpo rígido cuando se perturba su equilibrio, se reservará el uso de las palabras *estable* e *inestable* para este último caso.

B y E. A pesar de que existen tres reacciones desconocidas **A**, **B** y **E** (figura 4.6*b*), la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no se cumplirá a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas resulte igual a cero. Aunque hay un número suficiente de restricciones, éstas no están ubicadas de manera apropiada y no existe ningún impedimento para que la armadura se mueva horizontalmente. En este caso, se dice que la armadura está *impropiamente restringida*. Como sólo quedan dos ecuaciones de equilibrio para determinar tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas. Por tanto, las reacciones impropias también producen indeterminación estática.

Otro ejemplo de restricciones impropias —y de indeterminación estática— lo proporciona la armadura mostrada en la figura 4.7, la cual está sostenida por un perno en A y por rodillos en B y C, que en conjunto involucran cuatro incógnitas. Como sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio independientes, las reacciones en los apoyos son estáticamente indeterminadas. Por otro lado, obsérvese que no se puede cumplir la ecuación $\Sigma M_A = 0$ bajo condiciones generales de carga puesto que las líneas de acción de las reacciones **B** y **C** pasan a través de A. Entonces, se concluye que la armadura puede rotar alrededor de A y, por ende, está impropiamente restringida.[†]

Los ejemplos de las figuras 4.6 y 4.7 conducen a la conclusión de que *un cuerpo rígido está impropiamente restringido siempre que los apoyos estén ubicados de tal forma que las reacciones sean concurrentes o paralelas*,[‡] aunque proporcionen un número suficiente de reacciones.

En resumen, para asegurarse de que un cuerpo rígido bidimensional está completamente restringido y de que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, se debe verificar que las reacciones, involucren tres —y sólo tres— incógnitas y que los apoyos estén ubicados de manera que no requieran que las reacciones sean concurrentes o paralelas.

Los apoyos que involucran reacciones estáticamente indeterminadas deben utilizarse con cuidado en el *diseño* de estructuras y con pleno conocimiento de los problemas que pueden causar. Por otra parte, es usual que el *análisis* de estructuras con reacciones estáticamente indeterminadas se realice en forma parcial por medio de los métodos de la estática. Por ejemplo, en el caso de la armadura de la figura 4.4, las componentes verticales de las reacciones en A y B se obtuvieron a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Por razones obvias, los apoyos que originan restricciones parciales o impropias se deben evitar en el diseño de estructuras estacionarias. Sin embargo, una estructura restringida en forma parcial o impropia no necesariamente se colapsará; bajo ciertas condiciones de carga en particular, se puede mantener el equilibrio. Por ejemplo, las armaduras de las figuras 4.5 y 4.6 estarán en equilibrio si las fuerzas aplicadas **P**, **Q** y **S** son verticales. Además, las estructuras diseñadas para moverse sólo deben estar parcialmente restringidas. Por ejemplo, un carro de ferrocarril sería de poca utilidad si estuviera completamente restringido por tener sus frenos aplicados en forma permanente.

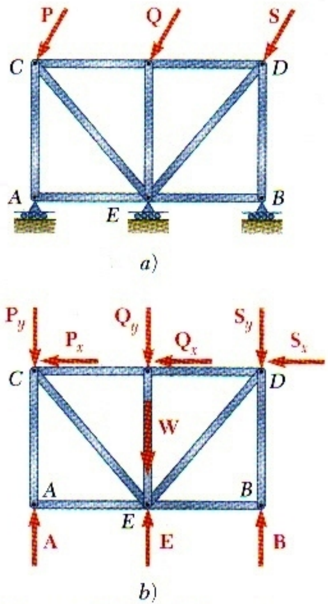


Figura 4.6 Restricciones impropias.

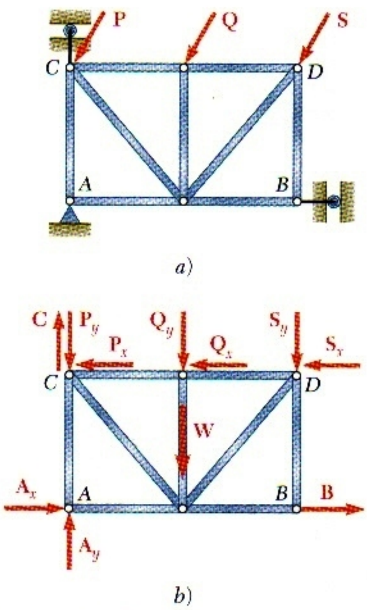


Figura 4.7 Restricciones impropias.

[†] La rotación de la armadura con respecto a A requiere algo de "juego" en los apoyos en B y C. En la práctica siempre existirá dicho juego. Además, se observa que si el juego es mínimo, el desplazamiento de los rodillos B y C, y por tanto, las distancias desde A hasta las líneas de acción de las reacciones **B** y **C**, también serán pequeñas. Así, la ecuación $\Sigma M_A = 0$ requiere que **B** y **C** sean muy grandes, lo cual puede causar la falla de los apoyos en B y C.

[‡] Debido a que esta situación surge por un arreglo o *geometría* inadecuados de los apoyos, comúnmente se hace referencia a la misma como *inestabilidad geométrica*.