Vectores

Cantidades vectoriales y escalares

Las cantidades físicas que estudiaremos en los cursos de física son escalares o vectoriales.

Una cantidad escalar es la que está especificada completamente por un número con unidades apropiadas. Una cantidad escalar sólo tiene magnitud. Ejemplos de cantidades escalares son la temperatura, el volumen, la masa, los intervalos de tiempo, etc.

Para manejar cantidades escalares se emplean Las reglas de la aritmética ordinaria.

Una cantidad vectorial es una cantidad física especificada por un número con unidades apropiadas más una dirección. Una cantidad vectorial tiene tanto magnitud como dirección y punto de aplicación. Ejemplos de cantidades vectoriales son la fuerza, la velocidad, la aceleración, etc.

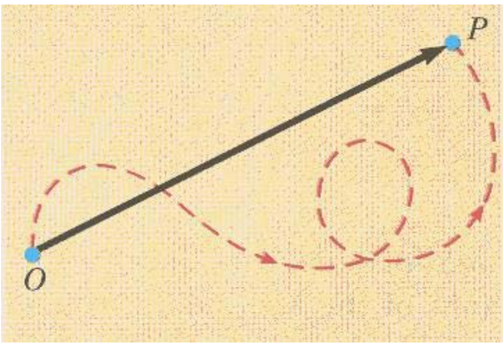


Figura 1.

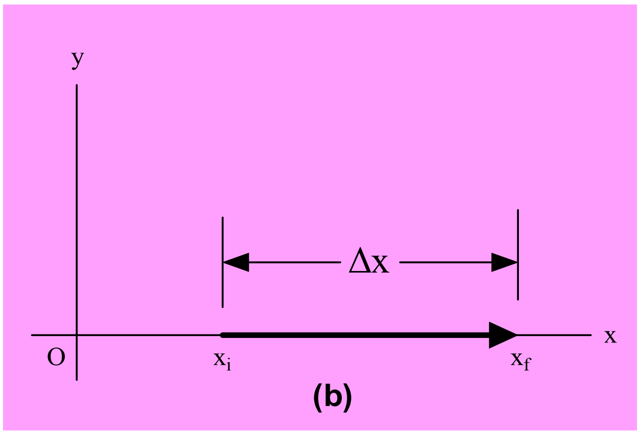


Figura 2.

Otro ejemplo de cantidad vectorial es el desplazamiento. Ejemplo ir del punto O hasta el punto P. Véase la figura 1. Si una partícula se mueve a lo largo del eje x desde la posición x_i hasta la posición x_f, como se muestra en la figura 2, su desplazamiento está dado por $\Delta x = x_f - x_i$.

Notación

A veces se emplean letras mayúsculas y negras, **A** por ejemplo, para representar una cantidad vectorial.
Otro manera común en la notación vectorial, es el dibujar una barra o flecha sobre la letra ($\bar{A}$). La magnitud del vector **A** se escribe como IAI.

La magnitud de un vector tiene unidades físicas, como ejemplo metros para el desplazamiento o metros por segundo para la velocidad.

Sistemas de coordenadas

Para especificar posiciones en el espacio se utilizan los sistemas de coordenadas. Un sistema de coordenadas se compone de lo siguiente:

- Un punto de referencia fijo, O, denominado el origen
- Un conjunto de ejes especificados con escalas y leyendas apropiadas sobre los ejes
- Instrucciones sobre cómo marcar un punto en dicho espacio.

Coordenadas rectangulares. En el plano, la posición de un punto P se puede especificar con las coordenadas rectangulares (*x*, *y*) donde *x* representa la distancia desde un origen hasta el punto P en la dirección horizontal *y* y representa la distancia desde un origen hasta el punto P en la dirección vertical. Así, en la figura 3, P esta localizado en las coordenadas rectangulares (3, 4).

Coordenadas polares. En el plano, la posición de un punto P también se puede especificar con las coordenadas polares **(r, θ)** donde **r** representa la distancia desde el origen hasta el punto P y θ representa el ángulo formado por la línea OP y el eje positivo de las x. En la figura 3, P se localiza en las coordenadas polares (5, 53.1°).

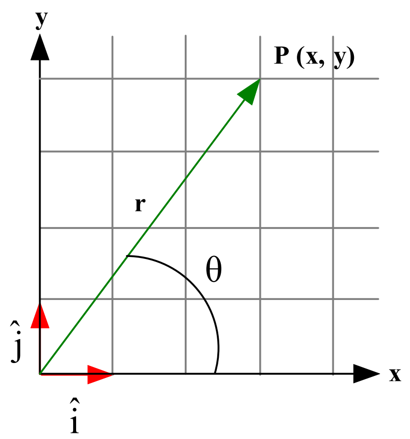


Figura 3.

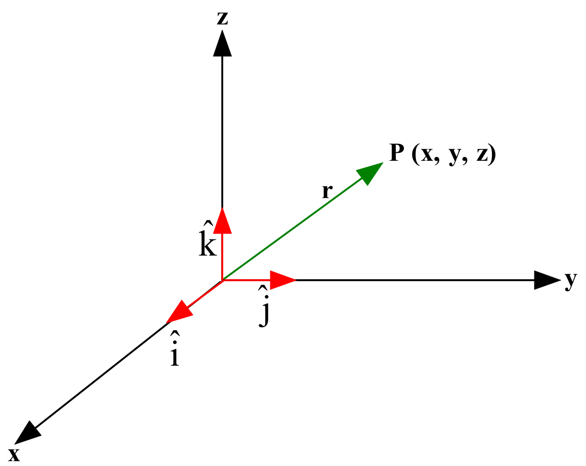


Figura 4.

Relación entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas

De acuerdo con la figura 3, a partir de las coordenadas polares, las coordenadas rectangulares pueden obtenerse con las ecuaciones

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Asimismo, las coordenadas polares pueden obtenerse de las coordenadas cartesianas mediante las relaciones

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Las calculadoras científicas proporcionan conversiones entre las coordenadas cartesianas y polares a partir de esta convención.

En el espacio, un vector se grafica como se muestra en la figura 4.

Vectores unitarios

Las cantidades vectoriales se expresan con frecuencia en términos de vectores unitarios. Un vector unitario es un vector sin dimensiones que tiene una magnitud exactamente igual a uno. Los vectores unitarios se utilizan para especificar una dirección determinada y no tienen otro significado físico. Se usan sólo por conveniencia en la descripción de una dirección en el espacio.

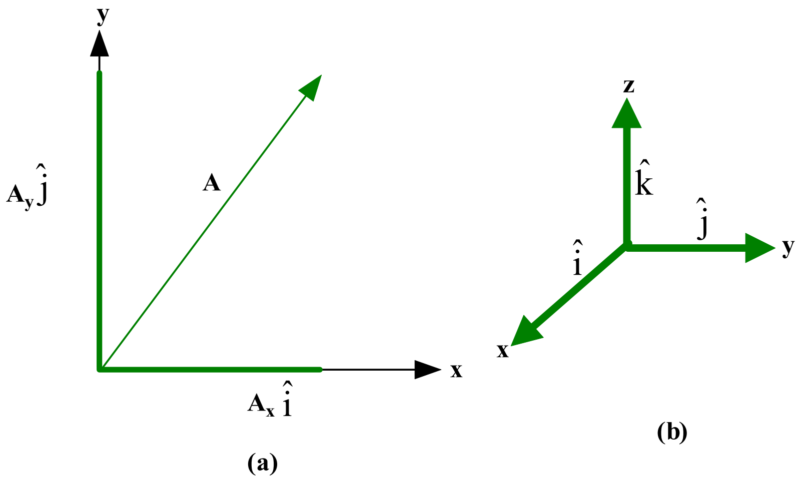


Figura 5.

Los símbolos **i**, **j** y **k** se utilizan para representar vectores unitarios que apuntan en las direcciones positivas de los ejes *x*, *y* y *z*, respectivamente. Los vectores unitarios **i**, **j** y **k** forman un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares en un sistema de coordenadas de mano derecha, como se muestra en la figura 5b. La magnitud de cada vector unitario es igual a la unidad.

En la figura 5a se muestra un vector **A** que se encuentra en el plano **xy**. El producto de la componente A_x y el vector unitario **i** es el vector A_x**i**, el cual es paralelo al eje *x* y tiene magnitud $|A_x|$ (El vector A_x**i** es una forma alternativa y más común de representar A_x) Del mismo modo, A_y**j** es un vector de magnitud A_y paralelo al eje *y*. (En este caso también, A_y**j** es una manera alternativa de representar A_y.) Así pues, el vector ***A*** en términos de los vectores unitarios se escribe

$$A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

En la figura 3, P esta localizado en las coordenadas rectangulares (3, 4).

Operaciones entre vectores

Igualdad de dos vectores

Para muchos propósitos, dos vectores A y B pueden considerarse como iguales si tienen la misma magnitud y tienen la misma dirección. Es decir, ***A*** = ***B***, sólo si ***A*** = ***B*** y los dos vectores actúan a lo largo de direcciones paralelas. Véase la figura 6.

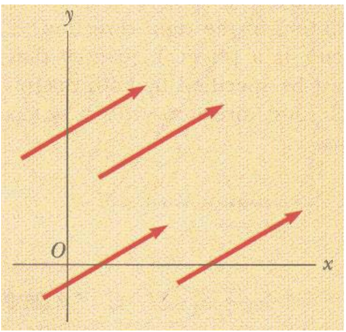


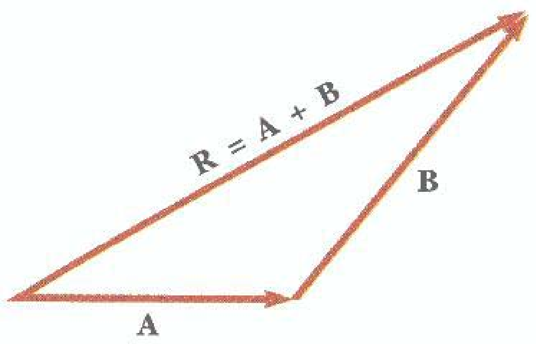
Figura 6.

Suma de vectores

Cuando dos o más vectores se suman todos deben tener las mismas unidades. Las reglas para la suma de vectores se describen con métodos geométricos y con métodos analíticos.

Método geométrico para la suma

Para sumar el vector **B** al vector **A** se dibuja primero el vector **A**, con su magnitud representada por una escala adecuada, sobre papel gráfico y después se dibuja el vector **B** a la misma escala con su origen empezando desde la punta de **A**, como se muestra en la figura 7. El vector resultante **R** = **A** + **B** es el vector dibujado desde el origen de **A** hasta la punta de **B**. Esto se conoce como el método de adición del triángulo.



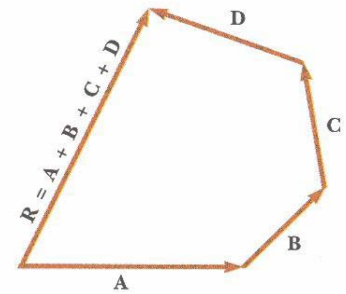


Figura 7. **Figura 8**.

Las construcciones geométricas también pueden utilizarse para sumar más de dos vectores. Esto se muestra en la figura 8 para el caso de suma de cuatro vectores. El vector suma resultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** es el vector que completa el polígono. En otras palabras, **R** es el vector dibujado desde el origen del primer vector hasta la punta del último vector.

Un método gráfico alternativo para sumar dos vectores, conocido como la regla de adición del paralelogramo, se muestra en la figura 9a. En esta construcción los orígenes de los dos vectores **A** y **B** están juntos y el vector resultante **R** es la diagonal de un paralelogramo formado con **A** y **B** como sus lados. Cuando se suman dos vectores, el resultado es independiente del orden de la adición.

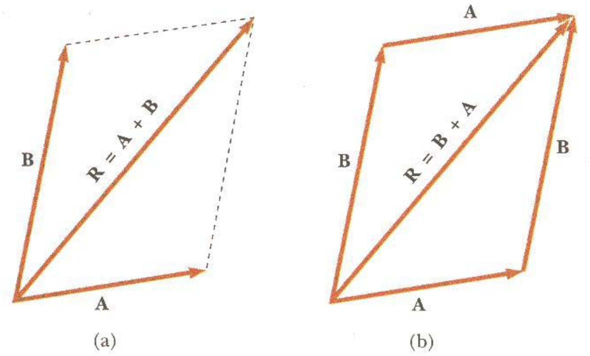


Figura 9.

En la construcción geométrica de la figura 9b se puede ver un ejemplo de lo anterior, que se conoce como ley conmutativa de la suma:

A + **B** = **B** + **A**

Si tres o más vectores se suman, el resultado es independiente de la manera en la que se agrupen los vectores individuales. Una prueba geométrica de esta regla para tres vectores se brinda en la figura 10. Lo anterior recibe el nombre de ley asociativa de la suma:

A + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**

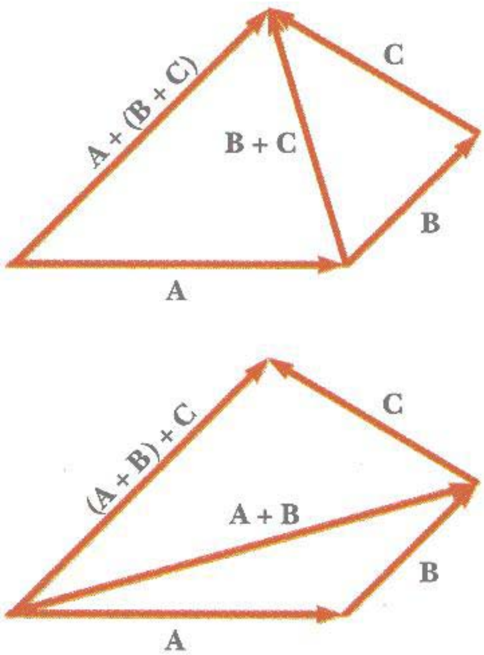


Figura 10.

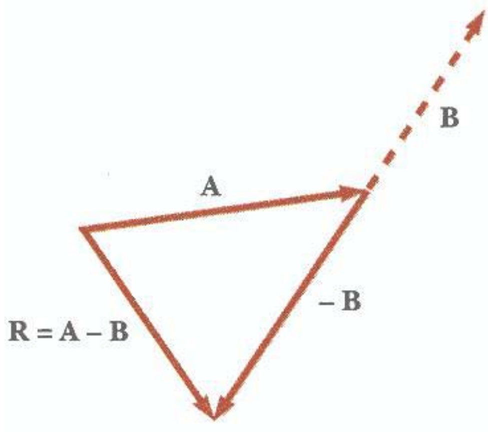


Figura 11.

El negativo de un vector

El negativo del vector **A** se define como el vector que al sumarse a **A** produce cero para suma vectorial. Es decir, **A** + (- **A**) = 0. Los vectores **A** y - **A** tienen la misma magnitud pero apuntan en direcciones opuestas.

Sustracción de vectores

La sustracción de vectores emplea la definición del negativo de un vector. Definimos la operación **A** - **B** como el vector - **B** sumado al vector **A**:

A – **B** = **A** + (-**B**)

La construcción geométrica para la sustracción de dos vectores se muestra en la figura 11.

Método analítico para la suma

El método geométrico para suma de vectores no es recomendable en situaciones en las cuales sea necesaria una gran exactitud o en problemas tridimensionales (x, y, z).

Componentes de un vector

Cualquier vector puede describirse mediante sus componentes. Considere un vector ***A*** localizado en el plano *xy* que forma un ángulo θ con el eje *x* positivo, como se muestra en la figura 12.

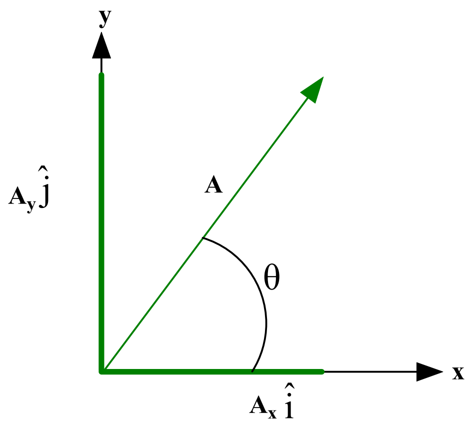


Figura 12.

Este vector puede expresarse como la suma de otros dos vectores $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$. En la figura 12 se ve que los tres vectores forman un triángulo rectángulo y que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$. Con frecuencia nos referiremos a las componentes de un vector **A**, escritas como A_x y A_y (sin escribirlas en negritas). La componente A_x representa la proyección de **A** a lo largo del eje *x*, y A_y representa la proyección de **A** a lo largo del eje y. Estas componentes pueden ser positivas o negativas. La componente A_x es positiva si A_x apunta a lo largo del eje *x* positivo, y es negativa si A_x apunta a lo largo del eje x negativo. Lo mismo se cumple para la componente A_y. De la figura 12 y de la definición de seno y coseno se ve que cos θ = A_x/A y que sen θ = A_y/A. Por tanto, las componentes de A son

$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Estas componentes forman dos lados de un triángulo recto cuya hipotenusa representa la magnitud de **A**. Así, se concluye que la magnitud de **A** y su dirección se relacionan con sus componentes por medio de las expresiones

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

De aquí se obtiene que θ = $\tan^{-1}(A_y/A_x)$, que se lee θ es igual al ángulo cuya tangente es igual a A_y/A_x. Observe que los signos de las componentes A_x y A_y dependen del ángulo θ. Por ejemplo, si θ = 120°, A_x es negativa y A_y es positiva. Si θ = 225°, tanto A_x como A_y son negativas.

Supongamos que **B** tiene componentes B_x y B_y, y **A** tiene componentes A_x y A_y y supongamos que se quiere sumar el vector **B** al vector **A** utilizando el método de componentes. Simplemente se suman las componentes *x* y *y* por separado. El vector resultante **R** = **A** + **B** es consecuentemente

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j}$$

Puesto que $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$, las componentes del vector resultante son

$$R_x = A_x + B_x$$

$$R_y = A_y + B_y$$

La magnitud de **R** y el ángulo que forma con el eje *x* se pueden obtener a partir de sus componentes utilizando las relaciones

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$$

y

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$$

El método descrito, para sumar dos vectores **A** y **B** usando el método de las componentes, puede comprobarse usando una construcción geométrica, como se muestra en la figura 13.

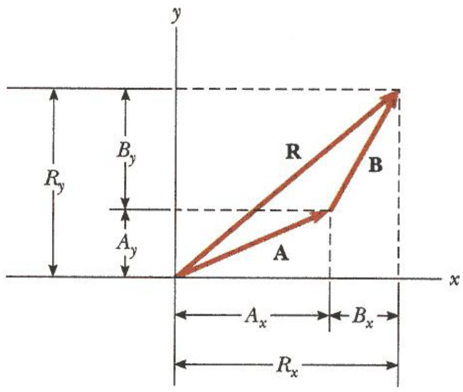


Figura 13.

La extensión de estos métodos a vectores tridimensionales es directa. Si **A** y **B** tienen componentes *x*, *y* y *z*, los expresamos en la forma

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

La suma de **A** y **B** es

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + Bz)\mathbf{k}$$

Con el procedimiento de las componentes que acabamos de tratar también se suman tres o más vectores,

Multiplicación de un vector por un escalar

Si el vector **A** se multiplica por una cantidad escalar positiva m, el producto m**A** es un vector que tiene la misma dirección que **A** y la magnitud m**A**. Si m es una cantidad escalar negativa, el vector m**A** está dirigido opuesto a **A**. Por ejemplo, el vector 5**A** es cinco veces más largo que **A** y apunta en la misma dirección que **A**; el vector –0.5**A** es un medio de la longitud de **A** y apunta en la dirección opuesta de **A.** Si **A** = 9**i** + 2**j** - 3**k,** 5**A** = 45**i** + 10**j** - 15**k**.

Producto escalar de dos vectores

En general, el producto escalar de dos vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$ es una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo θ entre ellos

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = AB\cos\theta \qquad (1.1)$$

v

donde A es la magnitud de $\overline{A}$, B es la magnitud de $\overline{B}$ y θ es el ángulo más pequeño entre $\overline{A}$ y $\overline{B}$, como muestra la figura 14. $\overline{A}$ y $\overline{B}$ no necesitan tener las mismas unidades.

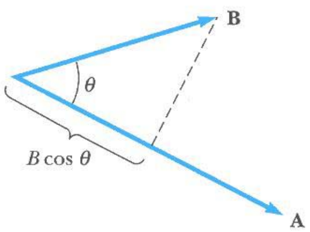


Figura 14.

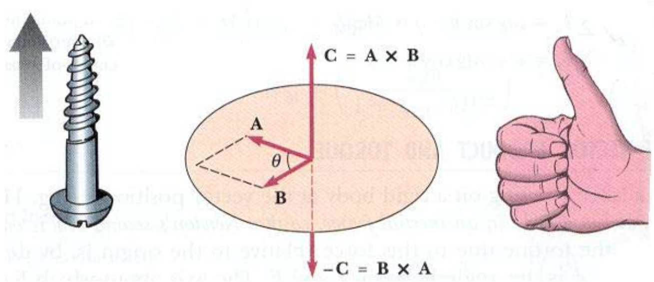


Figura 15.

La ecuación (1.1) señala que $\overline{A} \cdot \overline{B}$, es el producto de la magnitud de $\overline{A}$ y la proyección de $\overline{B}$ sobre $\overline{A}$.

El producto escalar es conmutativo. Es decir,

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{B} \cdot \overline{A} \qquad (1.2)$$

También, el producto escalar obedece a la ley distributiva de la multiplicación, por lo que

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{C} \tag{1.3}$$

Cuando $\bar{A}$ es perpendicular a $\bar{B}$, θ = 90°, entonces $\bar{A} \cdot \bar{B} = AB\cos 90^o = 0$, ya que cos 90° = 0. Cuando $\bar{A}$ es paralelo a $\bar{B}$, θ = 0°, entonces $\bar{A} \cdot \bar{B} = AB$, ya que cos 0° = 1.

$\bar{A} \cdot \bar{B} = 0$, también se cumple en el caso más trivial cuando $\bar{A}$ o $\bar{B}$ son cero. Si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ apuntan en direcciones opuestas (θ = 180°), entonces $\bar{A} \cdot \bar{B} = -AB$. El producto escalar es negativo cuando 90° < θ < 180°.

De la definición de $\bar{A} \cdot \bar{B}$ se sigue que los productos escalares de los vectores unitarios son

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \tag{1.4}$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \tag{1.5}$$

Los vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$ pueden expresarse en función de sus componentes como

$$\bar{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\bar{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

Por lo tanto el producto escalar de $\bar{A}$ y $\bar{B}$, también se puede expresar como

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.6}$$

ya que, $\bar{A} \cdot \bar{B} = (A_x + A_y + A_z) \cdot (B_x + B_y + B_z)$ se reduce a la expresión anterior debido a la propiedad distributiva del producto punto y el valor del producto punto entre los vectores unitarios. Igualmente, en el caso especial en que $\bar{A}$ = $\bar{B}$, se obtiene que

$$\bar{A} \cdot \bar{A} = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2 \tag{1.7}$$

Producto vectorial entre dos vectores

Dados cualesquiera dos vectores **A** y **B** el producto vectorial **A** x **B** se define como un tercer vector **C**, cuya magnitud es ABsenθ, donde θ es el ángulo formado por los vectores **A** y **B**. Es decir, si **C** está dado por

C = **A** x **B**

su magnitud es

$$C = AB\operatorname{sen}\theta \tag{1.8}$$

Nótese que la cantidad $AB\text{sen}\theta$ es igual al área del paralelogramo formado por **A** y **B**, como se muestra en la figura 15.

La dirección de **A** x **B** es perpendicular al plano formado por **A** y **B**, como se observa en la figura 15, y su sentido está determinado por el avance de un tornillo de cuerda derecha cuando se gira un ángulo θ desde **A** hasta **B**. Una regla más conveniente que puede usarse para determinar la dirección de **A** x **B** es la regla de la mano derecha, ilustrada en la figura 15. Los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de **A** y luego "se enrollan" hacia **B** un ángulo θ. La dirección del pulgar derecho levantado representa la dirección de **A** x **B**. Debido a la notación, **A** x **B** a menudo se lee "A cruz B". De ahí el término producto cruz.

Propiedades del producto vectorial

1. A diferencia del producto escalar, el orden en el cual se multiplican los dos vectores en un producto cruz es importante, esto es,

A x **B** = -(**B** x **A**)

En consecuencia, si se cambia el orden del producto cruz, debe cambiar el signo. Esta relación se puede verificar fácilmente con la regla de la mano derecha. Es decir el producto cruz no es conmutativo.

2. Si el vector **A** es paralela al vector **B** ($\theta = 0^o$ o 180°); entonces **A** x **B** = 0; por lo que **A** x **A** = 0.

3. Si **A** *es perpendicular a* **B***, entonces* |**A** x **B**| = AB.

4. El producto vectorial obedece a la ley distributiva, es decir,

A x (**B** + **C**) = **A** x **B** + **A** x **C**

5. La derivada del producto cruz respecto de alguna variable como por ejemplo t es

$$\frac{d}{dt}(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{A}\times\frac{d\bar{B}}{dt} + \frac{d\bar{A}}{dt}\times\bar{B} \tag{1.9}$$

donde es importante preservar el orden multiplicativo de **A** y **B**, en vista de la propiedad no conmutativa del producto cruz.
Como un ejercicio, muestre, a partir de que $\bar{A}\times\bar{B} = AB\text{sen}\theta$ y de la definición de vectores unitarios, que los productos cruz de los vectores unitarios rectangulares $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ obedecen a las siguientes expresiones:

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0 \tag{1.10}$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = -\hat{j}\times\hat{i} = \hat{k} \tag{1.11}$$

$$\hat{j}\times\hat{k} = -\hat{k}\times\hat{j} = \hat{i} \tag{1.12}$$

$$\hat{k}\times\hat{i} = -\hat{i}\times\hat{k} = \hat{j} \tag{1.13}$$

Los signos son intercambiables. Por ejemplo, $\hat{i}\times(-\hat{j}) = -\hat{i}\times\hat{j} = -\hat{k}$.

El producto cruz de cualesquiera dos vectores **A** y **B** puede expresarse en forma de determinante:

$$\overline{A}\times\overline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

Expandiendo este determinante se obtiene el resultado

$$\overline{A}\times\overline{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \tag{1.15}$$

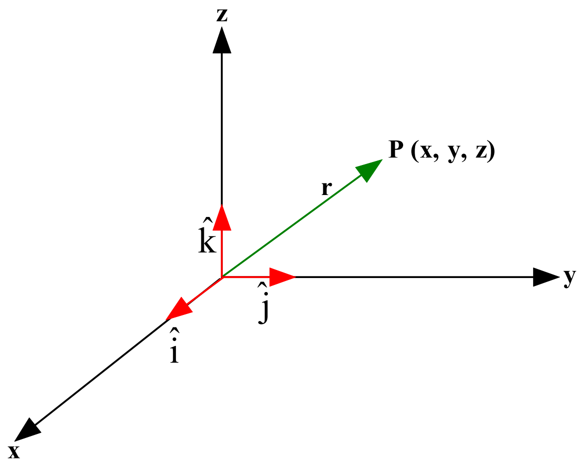
Formulario

Cantidades vectoriales y escalares

¿Qué es una cantidad escalar? Una cantidad escalar es la que está especificada completamente por un número con unidades apropiadas. Una cantidad escalar sólo tiene magnitud.

¿Qué es un Vector? Una cantidad vectorial es una cantidad física especificada por un número con unidades apropiadas más una dirección. Una cantidad vectorial tiene tanto magnitud como dirección y punto de aplicación.

¿Dónde graficamos los vectores? En el plano (x, y) o en el espacio. Depende de las dimensiones del vector. En el espacio, un vector se grafica como se muestra en la siguiente figura.



Coordenadas rectangulares El punto P en coordenadas cartesianas se representa como la pareja (x, y).

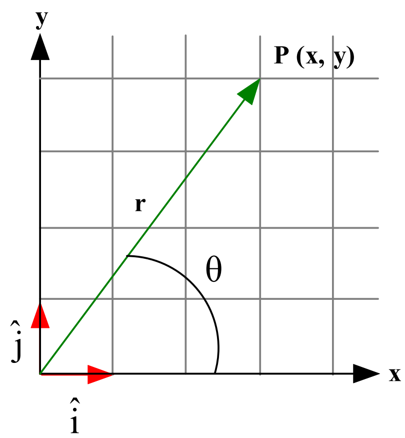


Figura 4

Relación entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas

A partir de las coordenadas polares, las coordenadas rectangulares pueden obtenerse con las ecuaciones

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta$$

Asimismo, las coordenadas polares pueden obtenerse de las coordenadas cartesianas mediante las relaciones

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Suma de vectores

Las reglas para la suma de vectores se describen adecuadamente con métodos analíticos.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

Sustracción de vectores

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Vectores unitarios

Los símbolos **i**, **j** y **k** se utilizan para representar vectores unitarios que apuntan en las direcciones positivas de los ejes *x*, *y* y *z*, respectivamente. Los vectores unitarios **i**, **j** y **k** forman un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares en un sistema de coordenadas de mano derecha. La magnitud de cada vector unitario es igual a la unidad.

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

Suma analítica de dos vectores

Si tenemos los vectores A y B que se muestran en la siguiente figura y dados por

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

La suma de **A** y **B** es

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + Bz)\mathbf{k}$$

Producto escalar de dos vectores

Si tenemos los mismos vectores A y B, su producto escalar es

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = AB\cos\theta$$
$$\overline{A} \cdot \overline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Si **A** = **B**, el producto punto o producto escalar nos da la norma del vector:

$$\overline{A} \cdot \overline{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

Producto cruz de dos vectores

Dados cualesquiera dos vectores **A** y **B** el producto vectorial **A** x **B** se define como un tercer vector **C**, cuya magnitud es $AB\operatorname{sen}\theta$ donde θ es el ángulo formado por los vectores **A** y **B**. Es decir, si **C** está dado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

su magnitud es $AB\operatorname{sen}\theta$.

El producto cruz de dos vectores **A** y **B** puede expresarse en forma de determinante:

$$\overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Expandiendo este determinante se obtiene que

$$\overline{A} \times \overline{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$$

Problemas

1. Los vectores **A** y **B** están dados por **A** = 2i + 3j y **B** = -i + 2j. (a) Determine el producto escalar entre **A** y **B** (b) Determine el ángulo θ entre **A** y **B**.

Solución:

(a) $\overline{A} \cdot \overline{B} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \cdot (-\hat{i} + 2\hat{j}) = -2\hat{i} \cdot \hat{i} + 2\hat{i} \cdot 2\hat{j} - 3\hat{j} \cdot \hat{i} + 3\hat{j} \cdot 2\hat{j}$ **= -2 + 6 = 4.**

donde se han utilizado las propiedades de los vectores unitarios $\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=1$, $\hat{i}\cdot\hat{j}=0$. El mismo resultado se obtiene al utilizar directamente la ecuación $\bar{A}\cdot\bar{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$, donde $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$ y $B_y = 2$.

(b) Las magnitudes de **A** y **B** están dadas por

$$A=\sqrt{A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$
$$B=\sqrt{B_x{}^2+B_y{}^2+B_z{}^2}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

Con la ecuación $\bar{A}\cdot\bar{B}=AB\cos\theta$ y con el resultado de (a) se obtiene

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{AB}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)=60.25^{\circ}$$

2. Para **A** = 4**i** + 3**j** y **B** = -**i** + 3**j**, encuentre (a) el producto escalar entre **A** y **B**, y (b) el ángulo entre **A** y **B**.

3. El vector **A** se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas polares (7, 70°) y el vector **B** se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas polares (4,130°). Encuentre el producto escalar entre **A** y **B.**

4. El vector ***A*** se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas polares (r_1, θ_1) y el vector **B** se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas (r_2, θ_2) Encuentre el producto escalar entre **A** y **B.**

14. El vector **A** tiene una magnitud de 5.00 unidades y **B** tiene una magnitud de 9.00 unidades. Los dos vectores forman un ángulo de 50.0° entre si. Determine el producto escalar entre **A** y **B.**

5. Demuestre que $\bar{A}\cdot\bar{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

6. Para **A** = 3i + j - k, **B** = -i + 2j + 5k, y **C** = 2j -3k, encuentre $\bar{C}\cdot(\bar{A}-\bar{B})$.

7. Una fuerza **F** = (6**i** - 2**j**) N actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento **s** = (3**i** + **j**) m. Encuentre (a) el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula, y (b) el ángulo entre **F** y **s**.

8. El vector **A** tiene 2.0 unidades de largo y apunta en la dirección positiva del eje *y*. El vector **B** tiene una componente a lo largo del eje *x* de -5.0 unidades de largo, una componente a lo largo del eje *y* de 3 unidades de largo y no tiene componente *z*. Encuentre el producto escalar entre **A** y **B** y el ángulo entre los vectores.

9. Una fuerza **F** = (3.00**i** + 4.00**j**) N actúa sobre una partícula. El ángulo entre **F** y el vector desplazamiento **s** es 32.0°, y **F** efectúa un trabajo equivalente a 100.0 J. Determine **s**.

10. Encuentre el ángulo entre **A** = -5**i** - 3**j** + 2**k**, y **B** = -2**j** - 2**k**.

11. Con la definición del producto escalar encuentre los ángulos entre:
(a) **A** = 3**i** -2**j**, y **B** = 4**i** - 4**j**
(b) **A** = -2**i** + 4**j**, y **B** = 3**i** - 4**j** + 2**k**
(c) **A** = **i** -2**j** + 2**k**, y **B** = 3**j** + 4**k**.

12. Encuentre el producto cruz para los vectores del problema 11.

Solución:

(a)

$$A\times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = (-12 + 8)\hat{k} = -4\hat{k}$$

(b)

$$A\times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 8\hat{i} - (-4)\hat{j} + (8 - 12)\hat{k} = 8\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

(c)

$$A\times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-8 - 6)\ \hat{i} - (4 - 0)\hat{j} + (3 - 0)\hat{k} = -14\hat{i} -4\hat{j} + 3\hat{k}$$